

INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS
Série 12

Exercice 1. Soient X, Y deux variables aléatoires. Montrez que si X, Y sont indépendantes, alors pour toutes fonctions mesurables $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont également indépendantes. Pour rappel, on dit qu'une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable lorsque pour tout $B \in \mathcal{F}_B$, on a $h^{-1}(B) \in \mathcal{F}_B$, où $\mathcal{F}_B$ désigne la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$, i.e, la tribu engendrée par les intervalles ouverts.

Exercice 2. Soient X, Y deux variables aléatoires. À l'aide du résultat pour les variables aléatoires discrètes vu en cours et en utilisant des discrétisations, montrez que si X et Y sont indépendantes, alors pour toutes fonctions mesurables $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $g(X)$ et $h(Y)$ soient intégrables, on a

$$\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}g(X)\mathbb{E}h(Y).$$

Exercice 3. Calculez la variance des variable aléatoires suivantes : Binomiale, de Poisson et Gamma.

Exercice 4. [Quelques contre-exemples] Trouvez :
- une variable aléatoire intégrable de variance finie avec $\mathrm{Var}(X) < \mathbb{E}(X)$.
- une variable aléatoire intégrable de variance infinie.
- une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ telle que $\mathrm{Var}(X_n) \to 0$, mais $\mathbb{P}(X_n \in [-1, 1]) \to 0$.
- une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ telle que $\mathrm{Var}(X_n) \to \infty$, mais $\mathbb{P}(X_n = 0) \to 1$.

Exercice 5. [Covariance et indépendance] Montrez que si X, Y sont intégrables et de variances finies, alors

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y).$$

En déduire que si X, Y sont également indépendantes, alors $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

A l'inverse, trouvez des variables aléatoires X, Y de covariance nulle qui ne sont pas indépendantes. En déduire qu'il existe des variables aléatoires non indépendantes pour lesquelles la variance de leur somme est égale à la somme des variances.

Exercice 6. [Vecteur gaussien] Montrez que pour un vecteur gaussien $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\overline{\mu}, C)$, la matrice C est la matrice de covariance ($C_{i,j} = \mathbb{E}(X_i X_j)$) et $\overline{\mu} = (\mathbb{E}X_1, \ldots, \mathbb{E}X_n)$. Montrez que dans le cas d'un vecteur gaussien, si $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$, alors X_i et X_j sont indépendants. Pouvez-vous donner une condition sur C sous laquelle un vecteur gaussien contiendrait des variables aléatoires mutuellement indépendantes ?

Exercice 7. [Déjà dans la série précédente mais important !] Soit X une variable aléatoire intégrable telle que X^2 soit aussi intégrable. Montrez que pour tout $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right]}{t^2}.$$

Trouvez une variable aléatoire X et un t tels que l'égalité soit atteinte.

0.1 ⋆ Pour le plaisir (non-examinable) ⋆

Exercice 8. [⋆] Soit $\nu(n)$ le nombre de premiers distincts divisant n, et $\epsilon > 0$ un nombre positif quelconque. Montrez que le nombre N_n de $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que

$$|\nu(k) - \log\log n| > (\log\log n)^{1/2+\epsilon}$$

vérifie $N_n/n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. [Indication : utilisez l'espérance et la variance.]